УДК 511

ПРО ДЕЯКІ ПРОБЛЕМИ СТРУКТУРНОЇ ТЕОРІЇ ДОДАВАННЯ МНОЖИН

В.М. Євладенко , Л.В. Євладенко , Ю.П. Пігарьов

Дається короткий огляд результатів про залежність між інваріантами T і R в структурній теорії додавання множин. Акцентується увага на окремих ще не розв'язаних проблемах.

This is a short survey of some results of invariant T and R interdependence in the sets adding structural theory. The emphasis is made on some problems which haven't been investigated yet.

Загальноприйняті позначення: $K = \{a_0, a_1, ... a_{k-1}\}$ – множина різних цілих чисел; $T\ (2 \cdot K) = T$ – число різних сум, утворених елементами множини K і K; R – число різних додатніх різниць, утворених елементами множини K; $2 \cdot R + 1 = \overline{R}$.

В 1966 році угорський математик П.Ердеш висунув припущення, що $T \le \overline{R}$. Здавалось правдоподібним, що має місце також і нерівність $T \ge R + k$, де k – кількість елементів множини K. Тобто існувала гіпотеза, що

$$R + k \le T \le \overline{R} \ . \qquad (1)$$

Але, як пізніше виявилось [1, 173], існують множини, для яких $T > \overline{R}$. Зокрема, такою є множина $K_1 = \{0, 1, 2, 4, 5, 9, 12, 13, 14\}$. Вона складається з чотирьох відрізків послідовних цілих чисел: [0, 1, 2], [4, 5], [9], [12, 13, 14]. При цьому множина K_1 має властивість *самоущільнення*: кількість цілих чисел третього відрізка /тобто 1/ дорівнює кількості відсутніх впорядкованих цілих чисел між першим і другим відрізками, тобто 1, адже відсутнім є одне число 3. Число ж цілих чисел четвертого відрізка (тобто 3) дорівнює числу відсутніх впорядкованих цілих чисел між другим і третім відрізками, тобто 3, адже відсутніми є три числа: 6, 7, 8.

Доведено, що для множин, які складаються з трьох відрізків послідовних цілих чисел, значення T і R задовольняють нерівностям (1).

В теоремі 1 роботи [2, с.52] будуються класи множин, для яких різниця $T - \overline{R}$ дорівнює будь-якому наперед заданому непарному натуральному числу. З цією метою розглянемо такі множини цілих чисел:

$$\{4 + 12s, 5 + 12s,\ 9 + 12s,\ 12 + 12s,\ 13 + 12s,\ 14 + 12s,\ \} = L_S,\ s \in N \cup \{0\};$$

$$\{0, 1, 2\} = A;\ \ A \cup L_0 = K_1;\ \ K_1 \cup L_1 = K_2, ..., K_{n-1} \cup L_{n-1} = K_n\ \ (n \in N).$$

При цьому: $T(2 \cdot K_S) = T_S$, R_S – число різних додатніх різниць, утворених елементами множини K_S, а $\ 2 \cdot R_S + 1 = \overline{R}_S\ \ (s \in N)$.

Методом математичної індукції доводиться, що при будь-якому натуральному n для цих множин мають місце рівності:

$$T_n = 4 + 24n,\ \overline{R_n} = 5 + 22n\ . \qquad (2)$$

Виходячи з цих нерівностей, будуються множини, для яких різниця $T-\overline{R}$ дорівнює будь-якому наперед заданому непарному натуральному числу, оскільки $T_n-\overline{R_n}=2n-1$.

В теоремі 2 цієї ж роботи додатково вводяться такі множини: $\{4+12n,\,5+12n\}=B;\ K_n\cup B=K_n^{/};\ T\left(2\cdot K_n^{/}\right)=T_n^{/};\ R_n^{/}$ – число різних додатніх різниць, утворених елементами множини $K_n^{/};\ 2\cdot R_n^{/}+1=\overline{R}_n^{/}$ і доводиться, що при будь-якому натуральному n маємо:

$$T_n^{/}=11+24n,\ \overline{R}_n^{/}=11+22n. \qquad (3)$$

Виходячи з рівностей (3), можна будувати множини, для яких різниця $T-\overline{R}$ дорівнює будь-якому наперед заданому парному натуральному числу, оскільки $T_n^{/}-\overline{R}_n^{/}=2n$.

Отже, узагальненням теорем 1 і 2 є твердження: існують множини, для яких різниця $T-\overline{R}$ дорівнює будь-якому наперед заданому натуральному числу.

Тут же [2, с.54] вказано ще один спосіб одержання множин з додатною різницею $T-\overline{R}$, пов’язаний з використанням поняття *подібних* множин. Цим способом будуються множини, для яких $T-\overline{R}=n$, причому кожна з них породжує зчисленну множину подібних їй множин з такими ж самими величинами різниць $T-\overline{R}$.

В теоремі 3 [2, с.55] використовуються дві множини K_n і $K_n^{/}$, які будуються індуктивно.

Множина K_n одержується наступним чином:

якщо $L_1=\{0,\,1,\,2,\,4,\ldots,2k\}$, а $L_S=\{a,\,a+1,\,a+2,\,a+4,\ldots a+2k\}$, то $L_{S+1}=\{2(a+2k)+1,\,(a+2k)+2,\,2(a+3k)+3,\,2(a+2k)+5,\ldots,2(a+2k)+2k+1\}$ і $\bigcup\limits_{S=1}^{n}L_S=K_n$ при будь-якому натуральному n.

Множина $K_n^{/}$ будується так:

нехай $L_n^{/}=\{0,\,1,\,3,\,5,\,7,\ldots,\,2k+1\}$ і якщо $L_S^{/}=\{a,a+1,a+3,a+5,\ldots,a+2k+1\}$, то $L_{S+1}^{/}=\{2(a+2k+1)+1,\,2(a+2k+1)+2,\,2(a+2k+1)+4,\,\ldots,2(a+2k+1)+2k+2\}$, і $\bigcup\limits_{S=1}^{n}L_S^{/}=K_n^{/}\,(n\in N)$. При цьому $T(2K_n)=T_n$, $T\left(2K_n^{/}\right)=T_n^{/}$, а число різних додатніх різниць, утворених елементами множин K_n і $K_n^{/}$, відповідно дорівнює R_n і $R_n^{/}$.

Методом математичної індукції доводиться, що для побудованих множин K_n і $K_n^{/}$ при будь-яких натуральних k і n мають місце рівності:

$$R_n = 2k + (4k+1)\frac{n(n-1)}{2}, \quad T_n = (3k+2)\frac{n(n+1)}{2} \quad \text{і}$$

$$R_n^{/} = (2k+1) + (4k+3)\frac{n(n-1)}{2}, \; T_n^{/} = (3k+3)\frac{n(n+1)}{2}.$$

Як наслідок з цієї теореми одержуємо, що при $n=7$ $R_7 - T_7 = 2k - 35$ і при $k \geq 18$ різниці R-T дорівнюють будь-яким наперед заданим непарним натуральним числам, а $R_7^{/} - T_7^{/} = 2k - 20$ і при $k \geq 11$ різниці $R^{/} - T^{/}$ дорівнюють будь-яким наперед заданим парним натуральним числам. Отже, побудовано множини, для яких різниці R-T дорівнюють будь-яким наперед заданим натуральним числам, тобто R-T=n.

В роботі [3, с.52] доводиться теорема 4, яка є узагальненням теореми 3

[2, с.55]. З цією метою будуються спеціальні множини K_n, для яких при будь-яких натуральних k і n мають місце рівності:

$$R_n = R_1 + \overline{R}_1 \cdot \frac{n^2 - n}{2}, \quad T_n = T_1 \cdot \frac{n^2+n}{2}.$$

З теореми 4 одержуємо два наслідки.

<u>Наслідок 1</u>. Якщо K_1 – множина степенів з основою $a > 1\,(a \in N)$ і різними натуральними показниками і $T(K_1) = k_1$, то

$$T(2K_1) = \frac{k_1^2 + k_1}{2}, \quad \text{а} \quad R_1 = \frac{k_1^2 - k_1}{2} \quad \text{і} \quad \overline{R_1} = k_1^2 - k_1 + 1.$$

Використавши теорему 4, одержимо множину з такими значеннями T_2 і $\overline{R}_2$: $T_2 = T_1 \cdot \frac{k_2^2 + k_2}{2}$, $\overline{R}_2 = \overline{R}_1 \cdot (k_2^2 - k_2 + 1)$. Застосувавши цю теорему *(m-1)* раз, приходимо до множини, для якої

$$T_m = \prod_{i=1}^{m} \frac{k_1^2 + k_1}{2}, \quad \overline{R}_m = \prod_{i=1}^{m} (k_1^2 - k_1 + 1).$$

Отже, при досить великих m $(m \in N)$ будемо одержувати множини з як завгодно великими значеннями T_m і $\overline{R}_m$.

<u>Наслідок 2</u>. Теорема 4 дає можливість будувати такі множини, для яких $R < T < R + T(k)$ і множини, для яких $T < R$.

Деякі з таких множин вказані в роботі [3, с.54]. Тут же наведені значення R і T для множин, що налічують 6, 7 та 8 елементів і дається класифікація цих множин за значеннями R і T. Відповідні множини взяті з таблиць 1, II роботи [4, с.189].

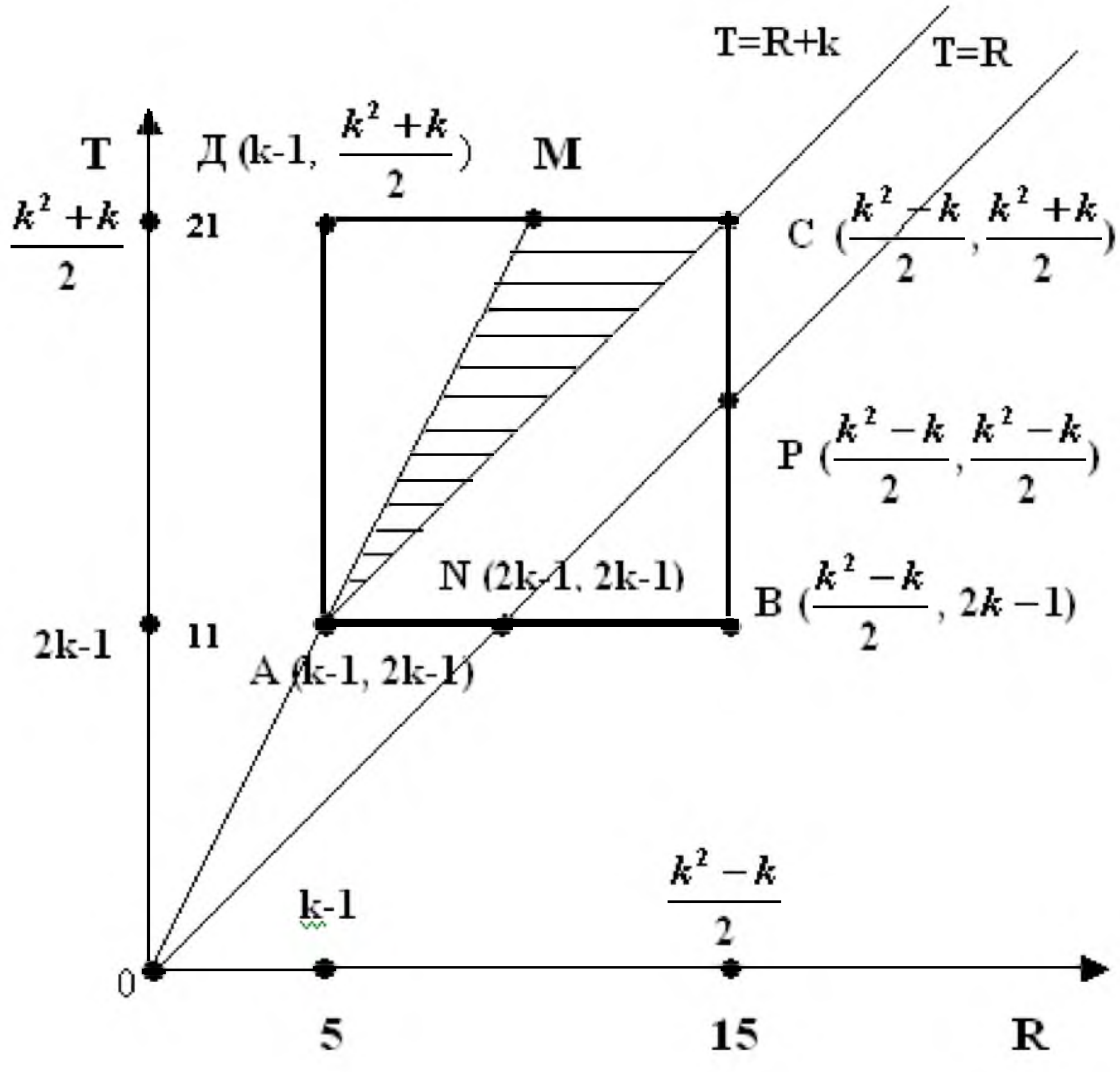
В статті [5] доведено теорему про існування множин, для яких $\overline{P} > c \cdot T$, де c – як завгодно велике дійсне число. Знайдено також значення $\frac{\ln T}{\ln \overline{R}}$ у вершинах критичних трикутників і, як приклад, побудовано множину, для якої $\overline{R} \geq 100 \cdot T$.

Цікава геометрична інтерпретація залежностей між R, T і k дається в роботі [3, с.57]. Суть її полягає в наступному.

Відомо, що $2 \cdot k - 1 \leq T \leq \dfrac{k^2 + k}{2}$, а $k - 1 \leq R \leq \dfrac{k^2 - k}{2}$ [6, с.19, с. 57].

В прямокутній системі координат ROT побудуємо квадрат АВСД (k), координатами вершин якого є: A (k-1; 2$\cdot k$-1), $B\left(\dfrac{k^2 - k}{2}; 2 \cdot k - 1\right)$, $C\left(\dfrac{k^2 - k}{2}; \dfrac{k^2 + k}{2}\right)$, $Д\left(k - 1; \dfrac{k^2 + k}{2}\right)$. Цей квадрат зображений на мал. 1. при значенні k =6.

Для множини $L_1 = \{0, a_1, a_2, ..., a_{k-1}\}$, де $a_k \in N(i = 1, 2, ..., k - 1)$, $T(L_1) = k$, $T(2 \cdot L_1) = T$. Число ж різних додатніх різниць елементів множини L_1 дорівнює R. Кожній множині $\{0, a_1, a_2, ..., a_{k-1}\}$ поставимо у відповідність точку з координатами (R, T).



Мал. 1 /для k =6/.

Точки з координатами (R, T) не виходять за межі квадрата АВСД (k). Рівняння діагоналі (АС) цього квадрата має вигляд $T= R+k$. Пряма $T=\overline{R}=2\cdot R+1$ проходить через вершину А і перетинає сторону [СД] квадрата в точці $M\left(\frac{k^2+k-2}{4};\frac{k^2+k}{2}\right)$. При цьому утвориться так званий *критичний* трикутник АМС (k). Виявляється, що при $k\le 7$ точки з координатами (R, T) не виходять за межі відповідного критичного трикутника, а при $k\ge 8$ уже знайдуться такі точки, які цій властивості не задовольняють. Зокрема, при k=8 такою точкою є точка з координатами (12, 26), що відповідає множині {0, 2, 3, 4, 7, 11, 12, 14} [3, с.58, мал.2]. Переважна більшість точок, що відповідають восьмиелементним множинам, попадають в критичний трикутник АМС (8).

Якщо побудувати бісектрису $T=R$, то вона перетне сторону квадрата АВСД (k) $(k\ge 5)$ в точках $N(2\cdot k-1;2\cdot k-1)$ і $P\left(\frac{k^2-k}{2};\frac{k^2-k}{2}\right)$. При цьому утвориться трапеція ANPC(k) і трикутник NPB(k) (мал. 1). Виявляється [3, с.58], що існують множини, для яких відповідні точки попадають у внутрішню область трапеції ANPC(k), а також множини, відповідні точки яких попадають у трикутник NPB (k) [3, с.58].

Якісна залежність між інваріантами R і T характеризується відношенням $\ln T/\ln\overline{R}$. Нехай α – нижня границя цієї послідовності для будь-яких множин К, а β – верхня границя цієї послідовності.

В роботі [1, с.172] доведено, що $\alpha\ge 3/4$, а $\beta\le 4/3$.

Зокрема, для множини {0, 1, 2, 4, 5, 9, 12, 13, 14} Т=28, Р=21, $\ln T/\ln P=\ln 28/\ln 43\approx 0{,}89$. Виявляється, що для різних інших відомих множин $\ln T/\ln\overline{P}>0{,}89$. Проблемою залишається відшукання таких множин, для яких $3/4<\ln T/\ln\overline{P}<0{,}89$, тобто множин, для яких вказане відношення попадає в інтервал (0,75; 0,88), зокрема, наближається до 0,75.

Що ж стосується β – верхньої границі послідовності $\ln T/\ln\overline{P}$, то можна вказати такий набір множин, для яких послідовність значень $\ln T/\ln\overline{P}$ є зростаючою і наближається до β=4/3. Такою, зокрема, є послідовність: $\ln 28/\ln 27\approx 1{,}011$; $\ln 26/\ln 25\approx 1{,}0222$; $\ln 59/\ln 55\approx 1{,}0175$; $\ln 51/\ln 47\approx 1{,}0212$; $\ln 67/\ln 61\approx 1{,}0228$; $\ln 83/\ln 75\approx 1{,}0235$; $\ln 99/\ln 89\approx 1{,}02372$; $\ln 115/\ln 103\approx 1{,}02378$. Очевидно, що кожне з даних відношень менше 4/3. Проблемою є відшукання таких множин, для яких $\ln T/\ln\overline{P}>1{,}024$, і таких, що $(\ln T/\ln\overline{P}-4/3)$ є як завгодно мале дійсне число.

БІБЛІОГРАФІЯ

1. Пигарев Ю.П., Фрейман Г.А. О зависимости между инвариантами R и T : Теория чисел. Теоретико-числовые исследования по спектру Маркова и структурной теории сложения множеств. – М.: Союзполиграфпром при ГК СМ СССР, 1973. – С. 172–174.

2. Євладенко В.М., Пигарьов Ю.П. Про залежність між інваріантами *R* і *T*. //Наукові записки. – Вип. 12. Серія: Фізико-математичні науки. – Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 1997. – С. 51–55.
3. Євладенко В.М., Пигарьов Ю.П. Залежність між інваріантами *R* і *T*. // Наукові записки. – Вип. 57. Серія: Математичні науки. – Кіровоград: КДПУ ім. В. Винниченка, 2004. – С. 52–59.
4. Асафова Г.А. Об одном типе логических квадратов шестого порядка: Теория чисел. Теоретико-числовые исследования по спектру Маркова и структурной теории сложения множеств. – М: Союзполиграфпром при ГК СМ СССР, 1973. – С. 189–190.
5. Євладенко В.М., Пігарьов Ю.П. Деякі питання структурної теорії додавання множин. //Наукові записки. – Вип. 65. Серія: Математичні науки. –Кіровоград: КДПУ ім. В.Винниченка, 2006. – С.67–69.
6. Фрейман Г.А. Начала структурной теории сложения множеств. – Казань, 1966. – 140с.

Кіровоградський державний педагогічний університет ім. В.Винниченка

Надійшло 16 січня 2006 р.